数理解析研究所講究録
151巻 1972年 123-130

特殊なMarkov性をもつ Random field

名大 理　久保 泉

§1. 序

この報告の一つの目的は，Fortus [1] の紹介だが，彼がそこで扱っている問題の背景は理解出来ないので，他の例と共に，特殊なMarkov性の例としての立場から紹介したい。

他の諸氏の稿に和して，次のような記号を与えておこう。

$\{X(t);\ t\in R^d\}$; 与えられたrandom field.

$\mathcal{B}(G) \equiv \sigma\{X(t);\ t\in G\}$,　$G\subset R^d$

$$\mathcal{B}^-(D) \equiv \bigcap_{D\subset G:\,\mathrm{open}} \mathcal{B}(G) \qquad \text{過去の}\ \sigma\text{-field}$$

$$\mathcal{B}^+(D) \equiv \bigcap_{D^c\subset G:\,\mathrm{open}} \mathcal{B}(G) \qquad \text{未来の}\ \sigma\text{-field}$$

$$\partial\mathcal{B}(D) \equiv \bigcap_{\partial D\subset G:\,\mathrm{open}} \mathcal{B}(G) \qquad \text{現在の}\ \sigma\text{-field}$$

$\mathfrak{B}^{+/-}(D)$: minimal splitting field

定義． X が D-Markov $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}^{+/-}(D) = \partial\mathfrak{B}(D)$

他の諸氏の稿で詳しく述べられてあるように，homogeneous な Gaussian random field が Markov 性をもつ条件は，その spectrum の言葉で調べられている。又，内挿，外挿は，微分方程式の境界値問題に密接な関係があり，特に，楕円型の場合は，Green 函数を使って具体的に，内外挿を行うことが出来る。

§2．では，丁度，uniform motion が Markov 過程の中で特殊なのと同じような意味で，特殊な Markov 性をもつ例として，波動方程式を充す random field について述べる。

§3 では，楕円型でない例をあげ，具体的に内挿，外挿問題を解いて，楕円型との異いを明らかにし，ある意味で，§2 におけるのと類似点があることを示す。

§2． 波動方程式を充す random field．

$R^2 \ni (t, x)$ 上の random field $\{X(t,x)\}$ を考えよう。我々は，path 毎に，$X(t,x)$ が波動方程式，

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

を充すことを仮定する。

良く知られているように，方程式(1) の解は，適当な函数 $f(\xi)$, $g(\eta)$ を使って，

(2) $$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

と表わされる。

話をみやすくするためと，§3との比較のため，変数変換

(3) $$\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases} \qquad v(\xi,\eta) = u(t,x)$$

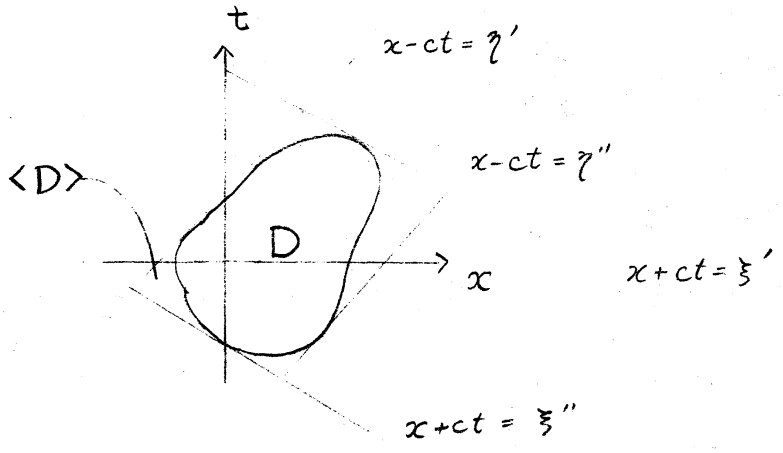
を行う。 (2) から直に，

(4) $$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

(5) $$v(\xi,\eta) = v(\xi,\eta_0) + v(\xi_0,\eta) - v(\xi_0,\eta_0)$$

なる関係が得られる。 (5) 式は，三点 (ξ,η_0), (ξ_0,η), (ξ_0,η_0) の v の値が定まれば，$v(\xi,\eta)$ が定まることを，意味している。

random field $X(t,x)$ を同じ変数変換をして，$Y(\xi,\eta)$ で表わそう。 今，連結領域 D に対して， 平行四辺形 $\langle D \rangle$ を図のように定義する。



式(5)から，<D>の隣り合った二辺の上で，$X(t,x)$が与えられれば，<D>の内部の値も定まる。この事実に注目すれば，次の式は，明らかになる。

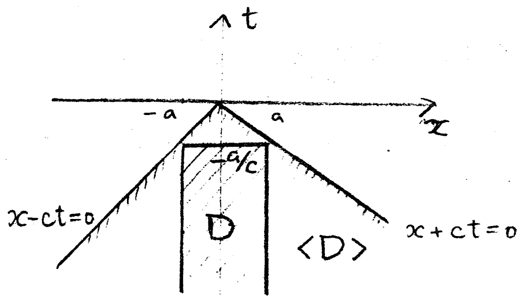
$$\text{(6)}\quad \begin{aligned} \mathcal{B}^-(D) &= \partial\mathcal{B}(D) = \mathcal{B}(\langle D\rangle) \\ \mathcal{B}^+(D) &= \mathcal{B}(R^2) \end{aligned}$$

従って，

$$\partial\mathcal{B}(D) = \mathcal{B}^-(D)\cap\mathcal{B}^+(D) = \mathcal{B}^{+/-}(D) = \mathcal{B}^-(D)$$

が得られ，Markov 性をもつことがわかる。しかし，非常に，特殊な case であることは明らかである。

Fortus は，連続で homogeneous な Gaussian random field に対し，D として，次図のような場合を扱ってい



る。 $X(t,x)$ が，homogeneous ならば，そのスペクトル $F(\cdot)$ は，二直線，$x=ct$，$x=-ct$ の上に縮退していて，random field は，二つの定常過程，$F(\xi,\omega)$，$G(\eta,\omega)$ と一つの確率変数 H でもって，

(7) $$X(t,x)=F(x+ct)+G(x-ct)+H$$

と表現され，F，G，H は互に直交し，F，G のスペクトルは，原点に台をもたない。

上の結果から，D で X が与えられれば，$\langle D\rangle$ でわかり $\{X(t,x)=Y(\xi,\eta)\ ;\ \xi,\eta\leq 0\}$ が与えられたことになる。大数の法則から，$\{F(\xi)\ ;\ \xi\leq 0\}$，$\{G(\eta)\ ;\ \eta\leq 0\}$，$H$ が，夫々，得られ $\langle D\rangle \ni (t_0,x_0)=(\xi_0,\eta_0)$ を外挿する問題は，F，及び G に対して，$F(\xi_0)$，$G(\eta_0)$ を外挿する問題に帰着される。

例 1. $E[X(t,x)X(s,y)]=e^{|x-y+c(t-s)|}+e^{|x-y-c(t-s)|}$

この例では，F，G は，Uhlembeck の Brown 運動になる。

従って $X(t_0,x_0)$ の外挿 U は

(8) $$U=\begin{cases} e^{-x_0-ct_0}F(0)+G(x_0-ct_0), & x_0-ct_0<0,\ x_0+ct_0>0 \\ e^{-x_0-ct}F(0)+e^{-x_0+ct_0}G(0) & x_0-ct_0>0,\ x+ct_0>0 \\ F(x_0+ct_0)+e^{-x_0+ct_0}G(0) & x_0-ct_0>0,\ x+ct_0<0 \end{cases}$$

§3. 楕円型でない例

簡単のため R^2 で考える。$\{Y(\xi,\eta)\,;\,(\xi,\eta)\in R^2\}$ を平均0の homogeneous Gaussian random field で共分散

$$E[Y(\xi,\eta)Y(\xi',\eta')] = e^{-|\xi-\xi'|-|\eta-\eta'|}$$

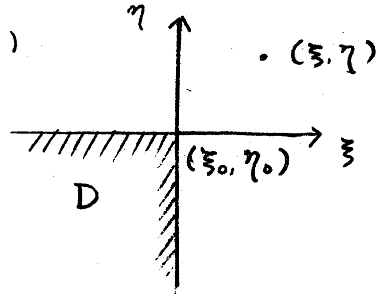
をもつものとする。このスペクトル密度は

(9) $$\Delta(\lambda,\mu) = \frac{4}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}$$

で与えられる。これは、小谷、井上、岡部、神田氏等の定式化の範囲に入っていて楕円型でない例である。

まず、外挿のことから述べると、次のようになる

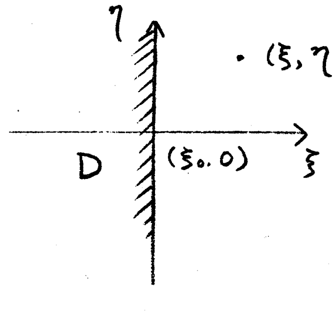
(イ)



D から (ξ,η) の外挿 U は

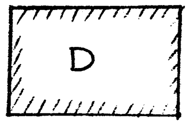
$$U = E[Y(\xi,\eta)\,|\,\mathfrak{B}^-(D)] = e^{-\xi+\xi_0-\eta+\eta_0}\,Y(\xi_0,\eta_0)$$

(ロ)



$$U = E[Y(\xi,\eta)\,|\,\mathfrak{B}^-(D)] = e^{-\xi+\xi_0}\,Y(\xi_0,\eta)$$

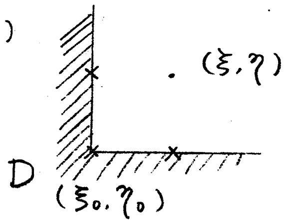
(ハ)



U は、(ξ,η) の位置によって (イ)又は(ロ)の case になる!

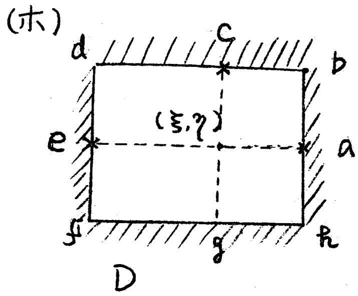
内挿は 多小，複雑で，

(ニ)



$$U = E[Y(\xi,\eta)\,|\,\mathcal{B}^-(D)]$$
$$= e^{-\eta+\eta_0}Y(\xi,\eta_0) - e^{-\eta+\eta_0-\xi+\xi_0}Y(\xi_0,\eta_0) + e^{-\xi+\xi_0}Y(\xi_0,\eta)$$

(ホ)



$$U = E[Y(\xi,\eta)\,|\,\mathcal{B}^-(D)]$$
$$= E\left[Y(\xi,\eta)\,\middle|\,\begin{matrix}Y(a),Y(b),Y(c)Y(d)\\ Y(e),Y(f),Y(g)Y(h)\end{matrix}\right]$$

であることが確められる。具体的な係数は省略する。

以上の外，内挿問題の結果は，ξ,η－軸に平行な直線で囲まれた図形に対して，単純Markov性が成立することを示している。（i.e. $\mathcal{B}^{+/-}(D)=\mathcal{B}(\partial D)$!）

もっと一般の領域Dに対しても多分

(10) $$U \equiv E[Y(\xi,\eta)\,|\,\mathcal{B}^-(D)] = E[Y(\xi,\eta)\,|\,\partial\mathcal{B}(D)] = E[Y\,|\,\mathcal{B}(\partial D)]$$

が成立するのであろうが，具体的な表現は知らない。楕円型の場合のように行くのであろうか？ 類推すれば，$\varphi(\xi,\eta)$を∂D上の連続函数とするとき，方程式

(11) $$\left(1-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)u=0$$
$$u(\xi,\eta)=\varphi(\xi,\eta) \qquad (\xi,\eta)\in\partial D$$

の解が一意に存在して， 特に $\psi(\xi,\eta)=\Upsilon(\xi,\eta)$ としたとき，(11)の解が U になれば良い。 事実 (イ)~(ホ) の例は (11) の解になっている。

我々の例においては，境界条件は多分 (11) の通りで良いのであろうが，一般に楕円型でない場合に，境界条件は，どのように与えればよいのか？ この解答を諸方々に御教示をお願いしたいというのが，この例を敢て取上げた理由である。

文献

Fortus [1] On extrapolation of a random field satisfying the wave equation. Theory of Probability and its applications Vol 8. No. 2. (1963)